Aula 14

Diferenciabilidade Complexa

Definição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \text{int}D_f$. Diz-se que f **é diferenciável, ou tem derivada, no sentido complexo em** z_0 se existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Quando este limite existe o seu valor designa-se por $f'(z_0)$ ou $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Diz-se que f **é holomorfa, ou analítica num ponto** z_0 se f for diferenciável em todos os pontos duma bola centrada em z_0.

Diz-se que f **é inteira** se $D_f = \mathbb{C}$ e se f é diferenciável em todos os pontos $z \in \mathbb{C}$.

Equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Teorema (Cauchy-Riemann): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathrm{int} D_f$. Então, f é diferenciável em $z_0 = x_0 + i\, y_0$ (no sentido complexo) se e só se

- f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$
- $f = u + iv$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto $z_0 = (x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases}$$

No caso em que $f'(z_0)$ existe, tem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Proposição: Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \text{int}D_f$. Se f é de classe C^1 numa vinhança de (x_0, y_0), ou seja, se existe um aberto em torno desse ponto onde as primeiras derivadas de f existam e sejam contínuas, então f é diferenciável em (x_0, y_0) (no sentido de $\mathbb{R}^2$).

Proposição: As seguintes funções complexas são inteiras e tem-se

- $(e^z)' = e^z$
- $(\text{sen } z)' = \cos z$
- $(\cos z)' = -\text{sen } z$
- $(\text{senh } z)' = \cosh z$
- $(\cosh z)' = \text{senh } z$